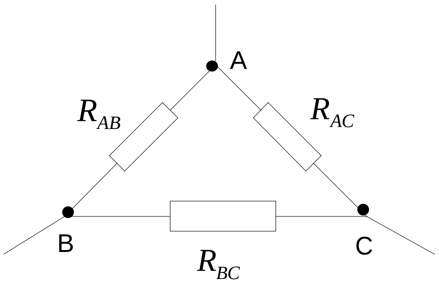
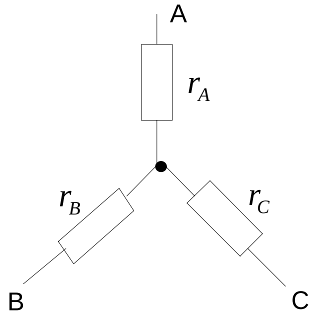
-EXERCICE 2.2-

• ENONCE :

« Théorème de Kennely »





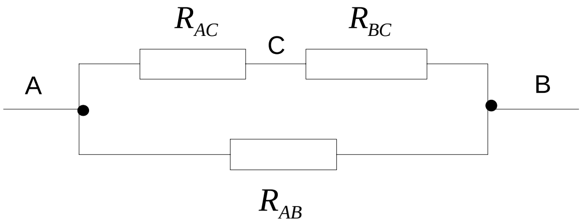
Soit un réseau comportant 3 bornes A,B,C et constitué de 3 résistances montées en « triangle » ; nous allons montrer qu'il existe un réseau équivalent **pour l'extérieur**, constitué de 3 résistances montées en « étoile ».

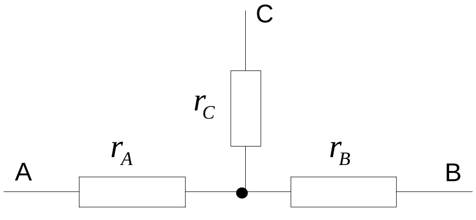
1) Etablir la relation de passage triangle $\rightarrow$ étoile, c'est-à-dire exprimer les résistances r_A, r_B, r_C en fonction des résistances R_{AB}, R_{BC}, R_{AC} .
2) Donner la relation de passage étoile $\rightarrow$ triangle, en faisant intervenir cette fois les conductances.
3) Quelle vous semble être la plus utile pour les montages usuels ?

• CORRIGE :

« Théorème de Kennely »

1) Nous allons exprimer le fait que, du point de vue de l'extérieur, les résistances entre 2 bornes quelconques A,B,C (la 3ème étant « en l'air ») doivent être égales 2 à 2 ; commençons par mettre la borne C en l'air, nous avons les schémas équivalents :





• Entre les bornes A et B, la résistance équivalente vaut d'une part :

$$R_{eq}(AB) = R_{AB} \parallel (R_{AC} \oplus R_{BC}) = \frac{R_{AB} \times (R_{AC} + R_{BC})}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} = \frac{R_{AB}R_{AC} + R_{AB}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

D'autre part : $R_{eq}(AB) = r_A + r_B$ (la résistance r_C n'intervient pas, puisque C est en l'air)

• En menant le même raisonnement pour les couples de bornes A et C, puis B et C, il vient :

$$r_A + r_B = \frac{R_{AB}R_{AC} + R_{AB}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \quad (1)\ ;\ r_A + r_C = \frac{R_{AC}R_{AB} + R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \quad (2)\ ;\ r_B + r_C = \frac{R_{BC}R_{AB} + R_{BC}R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \quad (3)$$

• En faisant (1)+(2)-(3), on obtient $2r_A$; on procède de même pour r_B et r_C, ce qui donne :

$$\boxed{r_A = \frac{R_{AB} \times R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \quad ; \quad r_B = \frac{R_{AB} \times R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \quad ; \quad r_C = \frac{R_{AC} \times R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}}$$

Rq : chaque résistance de l'étoile partant d'une borne donnée, est le produit des 2 résistances du triangle partant de la même borne, divisé par la somme des 3 résistances du triangle.

2) Travaillons cette fois avec les conductances ; avec la borne C en l'air, on a :

$$G_{eq}(AB) = G_{AB} + \frac{G_{AC} \times G_{BC}}{G_{AC} + G_{BC}} = \frac{g_A \times g_B}{g_A + g_B}, \quad \text{avec : } G_{AB} = \frac{1}{R_{AB}} \text{ et } g_A = \frac{1}{r_A} \text{ etc...}$$

(rappelons que des conductances en parallèle s'ajoutent, alors que ce sont leurs inverses que l'on somme lorsqu'elles sont en série)

• De même : $G_{AC} + \dfrac{G_{AB} \times G_{BC}}{G_{AB} + G_{BC}} = \dfrac{g_A \times g_C}{g_A + g_C}$ et $G_{BC} + \dfrac{G_{AB} \times G_{AC}}{G_{AB} + G_{AC}} = \dfrac{g_B \times g_C}{g_B + g_C}$; après calculs :

$$\boxed{G_{AB} = \frac{g_A \times g_B}{g_A + g_B + g_C} \quad ; \quad G_{AC} = \frac{g_A \times g_C}{g_A + g_B + g_C} \quad ; \quad G_{BC} = \frac{g_B \times g_C}{g_A + g_B + g_C}}$$

3) On utilise plus fréquemment la transformation triangle $\rightarrow$ étoile, car elle permet en général de **réduire le nombre de mailles**.